Concursul Fractal

A Șaptea Ediție, 19 Octombrie 2025

Problema 1. Când împărțim numărul natural a la numărul natural b obținem un cât egal cu restul împărțirii. Poate suma acestor numere să fie 99? Dar 100?

Soluție: Numere cu suma 99 există, de exemplu 49 și 50. Dacă suma arfi 100, să zicem că a dă restul x la împărțire la b, atunci $a = bx + x$, și deci $100 = a + b = bx + x + b$. Adunând 1 în ambele părți, $101 = bx + b + x + 1 = (b + 1)(x + 1)$, dar aceasta nu este posibil căci 101 este un număr prim.

Problema 2. Marius și Alexandru joacă un joc. Pe o foaie de hârtie sunt 100 de căsuțe, inițial goale. Între prima și a doua căsuță este desenat semnul înmulțirii, între a doua și a treia semnul adunării, apoi iar semnul înmulțirii, apoi iar semnul adunării și așa mai departe. Când jocul începe, fiecare jucător, începând cu Marius, scrie într-o căsuță goală un număr de la 1 la 100, care nu a mai fost scris încă. După 100 de mutări, se calculează rezultatul operației. Dacă rezultatul e par, câștigă Alexandru, dacă nu, Marius. Cine dintre cei doi jucători poate câștiga garantat?

Soluție: Considerăm 50 de căsuțe formate din câte 2 pătrățele vecine. Alexandru poate câștiga, iar pentru aceasta trebuie de fiecare dată când Marius pune un număr impar într-o căsuță, el să pună un număr par în aceeași căsuță și viceversa. În final se adună 50 de numere pare, deci rezultatul e par.

Problema 3. Fie p un număr prim. Câte numere e necesar să alegem ca să fim siguri că sau suma a două dintre aceste numere, sau diferența lor este divizibilă la p?

Soluție: Dacă p este 2 răspunsul e clar 3, dacă p este mai mare decât 2 răspunsul e $\frac{p+3}{2}$. Ca să vedem că $\frac{p+1}{2}$ numere nu sunt de ajuns, alegem numerele $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ și p. Ca să arătăm că printre $\frac{p+3}{2}$ mereu există astfel de numere, asumăm că pentru o anumită alegere nu există. Atunci nu putem avea două numere ce dau același rest la împărțire, deci avem maxim p numere. Iar din aceste p, din perechile ce dau resturi $(0, 0), (1, p-1), (2, p-2), \ldots (\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}$ putem alege maxim câte un număr, dar avem doar $\frac{p+1}{2}$.

Problema 4. Savanții au descoperit un tip de broaște țestoase care pot trăi un milion de ani. Un an se numește bun pentru o broască țestoasă dacă vârsta pe care o împlinește în acel an divide numărul anului. Spre exemplu, pentru o broască născută în 2022, 2025 este bun, căci ea are 3 ani și 3 divide 2025. Viorel spune că, pentru orice broască născută în secolul XXI, există măcar 2 ani buni, dar și că, pentru orice 2 astfel de broaște, există un an care este bun pentru ambele. Care din afirmațiile lui Viorel sunt adevărate?

Soluție: Prima afirmație este corectă, căci dacă țestoasa s-a născut în anul x, în anul $x+1$ are 1 an deci acesta este bun pentru ea, dar și în anul $2x$ are x ani, deci la fel este bun. A doua afirmație nu e corectă. Luăm de exemplu o țestoasă născută în 2025 și una în 2027. Cum 2027 este prim, ca anul $2027 + a$ să fie bun pentru aceasta e necesar ca a să dividă 2027, deci să fie 1 sau 2027. Dacă $a = 1$, 2028 nu e bun pentru a doua țestoasă, la fel și dacă $a = 2027$, $2 \cdot 2027$ nu se împarte la 2029.